Premi Évariste Galois 2016 de la Societat Catalana de Matemàtiques

L'objectiu principal del treball és estudiar la regularitat de les solucions d'equacions parabòliques no locals. Essent més precisos, donat un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i una funció $f\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, s'estudia la regularitat de les solucions $u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de

$$\partial_t u - Lu = f(t,x) \quad \text{a } \Omega,\ t>0, \tag{1}$$

on L és un operador no local estable d'ordre $2s$, amb $s \in (0,1)$. Aquest tipus d'operadors són els generadors infinitesimals de processos de Lévy simètrics i estables, i són de la forma

$$Lu(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(t,x+z) - u(t,x))d\nu(z),$$

on ν és una mesura a $\mathbb{R}^n$ que compleix $\int_{\mathbb{R}^n} \min\{1,|z|^2\}d\nu(z) < \infty$ i $d\nu(z) = d\nu(-z)$. El fet que l'operador sigui estable d'ordre $2s$ es tradueix en el fet que ν és homogènia d'ordre $-n-2s$. El cas més paradigmàtic d'operador no local es dóna quan $d\nu(z) = c|z|^{-n-2s}dz$. En aquest cas, l'operador L és un múltiple del laplacià fraccionari $(-\Delta)^s$.

A grans trets, al treball es demostra que les solucions $u(t,x)$ tenen una certa regularitat a l'interior del domini Ω per a temps positius, i a més es demostra també regularitat fins a la vora del domini, $\partial\Omega$.

La regularitat interior per a les solucions d'equacions el·líptiques que involucren el laplacià fraccionari és coneguda des de fa molts anys. D'aquesta manera, es compleix que, si $u(x)$ és acotada a tot $\mathbb{R}^n$, i resol l'equació $(-\Delta)^s u = f(x)$ a B_1, aleshores

$$f \in C^{\alpha}(B_1) \implies u \in C^{\alpha+2s}(B_{1/2}),$$

sempre que $\alpha + 2s$ no sigui enter. Aquí, C^α i $C^{\alpha+2s}$ denoten espais de Hölder d'ordre α i $\alpha+2s$, respectivament. Pel que fa a la regularitat fins a la vora, els principals resultats coneguts els han obtingut recentment (2012 i 2014) Ros-Oton i Serra. Aquests resultats diuen que si $(-\Delta)^s u = f$ a Ω, i $u = 0$ a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, aleshores

$$f \in L^\infty(\Omega) \implies \begin{cases} u \in C^s(\overline{\Omega}), \\ u/d^s \in C^{s-\epsilon}(\overline{\Omega}),\ \forall\, \epsilon > 0, \end{cases}$$

on $d = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ denota la distància a l'exterior del domini Ω.

Al treball presentat s'estudien propietats de regularitat semblants a les anteriors, però generalitzades per a:

- Equacions no locals parabòliques (és a dir, amb dependència en t).
- Operadors no locals estables L, més generals que $(-\Delta)^s$.

La primera part del treball fa referència a la regularitat interior per a solucions d'equacions de la forma (1). Com que l'operador $\partial_t - L$ és d'ordre 1 en t i d'ordre $2s$ en x, s'utilitzen normes pròpies d'espais Hölder parabòlics, i es pot afirmar que $u \in C^{\beta,\alpha}_{t,x}(I \times \Omega)$ per a un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ i per a $\alpha, \beta \in (0,1)$ si u és C^β en t uniformement per a tot punt de Ω, i u és C^α en x uniformement per a tot temps en I.

El primer resultat, doncs, és una estimació respecte a la regularitat interior de les solucions del problema parabòlic. A grans trets, el que diu el teorema presentat al treball és que si $u(t,x)$ resol l'equació $\partial_t u - Lu = f(t,x)$ a $(0,1) \times B_1$, aleshores $f \in C^{\frac{\alpha}{2s},\alpha}_{t,x}((0,1)\times B_1)$ implica que:

$$u \in C^{1+\frac{\alpha}{2s},\alpha+2s}_{t,x}\left((1/2,1)\times B_{1/2}\right).$$

És a dir, a l'interior es guanya la regularitat que podríem esperar segons els operadors que es tracten (d'ordre $2s$ en x i d'ordre 1 en t), i a més, aquest resultat és òptim per a operadors estables generals.

Per demostrar aquestes estimacions interiors s'usa un mètode de L. Simon per trobar estimacions Schauder per a operadors diferencials $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}$ (L. Simon, 1997), adaptat al cas de l'operador parabòlic i no local $\partial_t - L$.

A la segona part del treball s'estudia la regularitat fins a la vora per a solucions del problema parabòlic:

$$\begin{cases} \partial_t u - Lu = f & \text{a } \Omega, \quad t > 0 \\ u = 0 & \text{a } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \quad t \geq 0, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{a } \Omega, \quad t = 0, \end{cases}$$

on u_0 és la condició inicial.

Mitjançant una adaptació de la demostració per al problema el·líptic (Ros-Oton i Serra, 2014), el resultat obtingut diu que:

$$f \in L^\infty((0,\infty) \times \Omega) \text{ i } u_0 \in L^2(\Omega)$$

implica que:

$$\begin{cases} u \in C^{1-\epsilon,s}_{t,x}((0,\infty) \times \overline{\Omega}) \\ u/d^s \in C^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2s},s-\epsilon}_{t,x}((0,\infty) \times \overline{\Omega}) \end{cases} \quad \forall \epsilon > 0,$$

on $d = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. En aquest cas es tracta d'un resultat que és nou fins i tot quan L és el laplacià fraccionari.

Noteu que, paral·lelament al que succeeix amb l'equació de la calor ordinària, independentment de la condició inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$, les solucions són immediatament regulars fins a la vora, amb la regularitat exposada.

Xavier Fernández-Real
Universitat de Texas a Austin

Premi Josep Teixidor 2016 de la Societat Catalana de Matemàtiques

La tesi està dividida en dues parts. La primera part tracta principalment qüestions de regularitat per a equacions integrodiferencials o no locals. Aquestes equacions apareixen en l'estudi de fenòmens de difusió de tipus Lévy a $\mathbb{R}^n$. Els processos de Lévy són els processos estocàstics amb increments independents i estacionaris, és a dir, descriuen moviments aleatoris «sense memòria» i amb una «llei d'evolució» independent de la posició i el temps. L'exemple típic d'aquests processos és el moviment Brownià, però altres processos de Lévy modelen millor fenòmens com per exemple les fluctuacions de preus d'accions en finestres temporals intradiàries, o els moviments d'algunes espècies animals.

Tota la informació sobre la distribució (que varia amb el temps) d'un procés de Lévy està continguda en un operador el·líptic L, el seu generador infinitesimal. El cas del moviment brownià correspon al cas del laplacià $L = -\Delta$, que té símbol de Fourier $|\xi|^2$. En el cas de processos de Lévy invariants per reescalaments i rotacions, els generadors són els laplacians fraccionaris $(-\Delta)^s$, $s \in (0,1]$, que tenen símbol de Fourier $|\xi|^{2s}$, això és $\mathcal{F}((-\Delta)^s u) = |\xi|^{2s}\mathcal{F}(u)$. Tret del laplacià $s = 1$, aquests operadors són de tipus integrodiferencial

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(y))|x-y|^{-n-2s}\, dy.$$

Se'ls anomena sovint «no locals» perquè depenen dels valors de la funció fora d'un petit entorn, a diferència dels operadors diferencials.

Hi ha molts resultats clàssics de regularitat per a $(-\Delta)^s$, l'operador l'invers del qual és el potencial de Riesz. Per exemple, l'expressió explícita del nucli de Poisson per a una bola és un resultat dels anys seixanta, com també era coneguda des de fa temps la resolubilitat en espais L^p de $(-\Delta)^s u = f$ a tot $\mathbb{R}^n$. Tot i així, res o gairebé res no se sabia sobre la regularitat a la vora. Un tema central d'aquesta tesi és l'estudi d'aquesta regularitat fins a la vora, que és qualitativament diferent de la de les equacions de segon ordre.

El nostre primer resultat en aquesta direcció és per a problemes de Dirichlet amb l'operador $L = (-\Delta)^s$. En aquest cas, demostrem que les solucions u són C^s fins a la vora i que el quocient $u/d^s \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, per a un $\alpha > 0$ prou petit, on d és la distància fins a la vora $\partial\Omega$. Notem que la solució de $(-\Delta)^s u = 1$ a B_1, amb $u \equiv 0$ fora de B_1 és donada per l'expressió explícita $u(x) = c(1-|x|^2)^s_+$, on c és la constant positiva apropiada per obtenir el valor 1 a la dreta. Per tant, la regularitat $u \in C^s$ no es pot millorar. En lloc d'això, com trobem a la tesi, la noció de regularitat «més fina» per a a aquestes equacions fraccionàries és la regularitat d'ordre superior per a u/d^s. Les estimacions a la vora anteriors per a $(-\Delta)^s$ són crucials per provar la identitat de Pohozaev per al laplacià fraccionari, un altre dels resultats més destacats de la tesi.

Els nostres mètodes per demostrar regularitat Hölder de u/d^s es basen en el principi del màxim, la desigualtat de Harnack, i en la construcció de barreres (supersolucions i subsolucions) apropiades. Això ens permet desenvolupar una versió no local del mètode de Caffarelli-Krylov per a equacions de segon ordre amb coeficients afitats mesurables. D'aquesta manera, obtenim resultats també per a equacions integrodiferencials completament no lineals, que apareixen en jocs estocàstics (*stochastic differential games*). Els nostres resultats s'apliquen a equacions completament no lineals que involucren generadors infinitesimals de processos de Lévy estables. Un dels resultats més rellevants de la tesi és que les solucions u satisfan $u/d^s \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per a α prou petit. Cal notar que aquests resultats estenen la teoria de regularitat el·líptica fins a la vora d'Evans i Krylov —per la qual aquests matemàtics van guanyar el premi Steele el 2004— al context d'operadors integrodiferencials, amb mètodes de demostració que, en molts punts, són completament diferents a causa del diferent comportament qualitatiu de les solucions a la vora.

A la segona part tractem dos exemples d'interacció entre qüestions isoperimètriques i equacions en derivades parcials. En el primer, fem servir el mètode d'Alexandrov-Bakelman-Pucci per a equacions el·líptiques per demostrar noves desigualtats isoperimètriques amb constant òptima en cons amb densitat. Demostrem que donat un con convex $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i una densitat $w \in C(\overline{\Sigma})$ que és homogènia de grau $\alpha > 0$ i tal que $w^{1/\alpha}$ és còncava a Σ, el quocient isoperimètric

$$\frac{\left(\int_{\partial\Omega\cap\Sigma} w\, d\sigma\right)^{1/(n+\alpha-1)}}{\left(\int_{\Omega\cap\Sigma} w\, dx\right)^{1/(n+\alpha)}}$$

es minimitza quan Ω és una bola centrada a l'origen (intersecada amb el con). També obtenim una versió anisotròpica d'aquest resultat. Per provar aquest resultat estenem la demostració de la desigualtat isoperimètrica clàssica de Xavier Cabré. Els nostres nous resultats contenen com a cas particular la desigualtat de Wulff i la desigualtat isoperimètrica en cons de Lions i Pacella.

En el segon exemple, usem la desigulatat isoperimètrica clàssica i la identitat de Pohozaev (de segon ordre) per establir un nou resultat de simetria radial per a equacions de reacció-difusió de segon ordre. La novetat principal respecte d'altres mètodes és que podem tractar nolinearitats discontínues. Per fer-ho, estenem un argument en dimensió dos de Pierre-Louis Lions del 1981 per obtenir ara també resultats en dimensions superiors.

Joaquim Serra
Weiertrass Institute Berlin

Racó biogràfic

Leibniz: un poliedre de moltes cares

Nota inicial: Havent estat impossible incloure en aquest número de la *SCM/Notícies* un mínim relat del polièdric Leibniz hem decidit fer-ho en dues parts. L'objectiu d'aquesta primera part és explicar com Leibniz va concebre la idea del càlcul diferencial. En una segona part explicarem altres cares del poliedre leibnizià.

Apunt biogràfic de Leibniz fins als trenta anys

Gottfried Wilhelm Leibniz nasqué l'1 de juliol de 1646 a la ciutat de Leipzig (ducat de Saxònia), faltaven un parell anys perquè s'acabés la guerra dels Trenta Anys. Tant el pare com la mare eren luterans i provenien de